

Управление коллективом: модель манипуляции

©2010 г. П.О. Облаков *

Организациями традиционно называют сознательно координируемые институты, объединяющие людей на постоянной основе для достижения определенных целей. Чтобы успешно развиваться, организация должна управлять подбором, обучением, оценкой и вознаграждением персонала. Взятые в своем единстве методы, процедуры, программы организации этих процессов составляют систему управления человеческими ресурсами [1–3].

Специфика управления персоналом как отрасли менеджмента заключена в том, что в отличие от оборудования и технологий человек не «создавался» для производства, а появился «стихийно», биологически и сохранил множество непроизводственных интересов. Отсюда возникают связи и побуждения личного характера, существенно влияющие на результаты организации.

В данной работе предлагается математическая модель взаимосвязей в коллективе, базирующаяся на процедурах дискретной математики и линейной алгебры [4–8], а также принятых в моделировании социальных процессов методах [9–16]; рассматривается обратная задача по выявлению исходных предпочтений работников для получения заданного коллективного мнения; предложена методика по использованию модели и оценке ее точности.

Прямая задача

Введем определение: a_{ij} – личная оценка i -м работником j -го работника – числовая мера бессознательного одобрения его поведения в интервале от полного одобрения ($a_{ij} = 1$) до полного неодобрения ($a_{ij} = -1$), при этом личная оценка работником себя a_{ii} ^{def} всегда одобрительная ($a_{ii} = 1$). Рассмотрев отношения всех сотрудников, можно составить матрицу личных оценок работников.

Привлекать работников к заполнению матрицы нецелесообразно. Во-первых, это привлечет ненужное внимание, во-вторых, результат будет ложный: работники будут лгать сознательно (из чувства карьеризма, осторожности) и бессозна-

тельно (из-за подсознательной половой, возрастной и прочей дискриминации). Руководителю проще воспользоваться своими субъективными предположениями и анализом конфликтов внутри коллектива.

При составлении матрицы нужно придерживаться двух правил:

a_{ii} ^{def} = 1 по определению личной оценки;
определитель матрицы личных оценок $\det A \neq 0$.

Пусть в коллективе работают 5 работников-исполнителей (исключая руководителя – от его лица мы проводим анализ). Для простоты расчетов используем трехбалльную шкалу личной оценки: одобрение +1, безразличие 0, неодобрение –1 (на самом деле личная оценка – непрерывная величина, поэтому к ней применимы арифметические операции; округление до трехбалльной ранговой шкалы вызвано удобством обработки информации). Заполнив матрицу, мы получаем инструмент анализа поведения коллектива (см. таблицу).

Матрица личных оценок работников коллектива А						
Работники	А.	Б.	В.	Г.	Д.	Итого
А.	1	–1	–1	–1	0	–2
Б.	1	1	–1	1	1	3
В.	1	0	1	0	0	2
Г.	–1	–1	–1	1	–1	–3
Д.	1	–1	–1	0	1	0
Всего	3	–2	–3	1	1	0

Обратим внимание на итоговые столбцы и строки. Суммы по строкам означают общее отношение работника к коллективу. Суммы по столбцам означают отношение коллектива к работнику. Назовем работников с наибольшими суммами по строкам (Б.) *лоялистами*, с наименьшими (Г.) – *оппозицией*; остальных – *центром*. Работники с наибольшими суммами по столбцам (А.) будут *лидерами*, с наименьшими (В.) – *маргиналами*, прочие – *ядром*. Более подробно на этой классификации мы остановимся ниже.

Предположим, мы располагаем вектором-столбцом личных отношений сотрудников к некоему явлению X (приказу, клиенту, мероприятию и пр.):

* Аспирант кафедры «Экономика и менеджмент» Старооскольского технологического института (филиал НИТУ «МИСиС»).

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каким будет отношение к этому же явлению после обсуждения в коллективе? Это не такой бессмысленный вопрос. Ведь личное отношение человека к чему-либо не совпадает с тем, как он действует по отношению к нему в присутствии посторонних. Оценивая поведение людей в обыденной жизни, социологи используют понятие референтных групп [17,18].

Логично считать, что в коллективе человек действует, опираясь на свое мнение и мнение окружающих, в зависимости от отношения к ним. Нам известно отношение работника к членам коллектива (это вектор-строка из A , см. таблицу):

$$A_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3} \ a_{i4} \ a_{i5})$$

Вклад первого работника в коллективную оценку i равен $a_{i1} \cdot b_1$ (одобрение или неодобрение чьего-то мнения); вклад второго – $a_{i2} \cdot b_2$; и т.д. Общая оценка i -м работником явления X после обсуждения в коллективе равна сумме этих вкладов и тождественно равна произведению вектора-столбца личных оценок явления X на вектор-строку личных оценок сотрудников i -м работником:

$$b_i^* = \sum_j b_j a_{ij} = |A_i B|$$

Поскольку каждый элемент вектора оценок решения в коллективе равен произведению соответствующей строки матрицы A на единственный вектор-столбец B , весь вектор коллективных оценок решения равен произведению вектора личных оценок решения на вектор личных оценок коллектива:

$$B^* = AB, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку отношение к сотруднику также образует столбец-вектор личных оценок, а из этих столбцов состоит вся матрица личных оценок, то, умножив ее на саму себя, мы получим матрицу коллективных оценок:

$$A^* = AA = A^2, \quad (2)$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Анализ матрицы позволяет делать некоторые прикладные выводы. Например, стоит поставить выполнять совместно работу сотрудников A и B или B и G ; а вот A и G лучше поставить в позицию конкуренции, тогда их соперничество принесет пользу.

Сделаем замечание математического плана. Мерность коллективных оценок, очевидно, отличается от личных: максимум в матрице A равен 1, в A^* равен 5. Это связано с тем, что оценка в коллективе складывается из n оцененных личных оценок; если отношение к сотруднику коррелирует с мнением этого сотрудника ($b_{ij}^* = b_j a_{ij} = \text{const} = \pm 1 \forall i, j$), получим максимальную коллективную оценку $n \cdot (\pm 1) = \pm n$, где n – размерность матрицы A (в данном случае 5). Разделив значения коллективных оценок на модуль $|\pm n| = n$, получим приведенные оценки в коллективе, соизмеримые с личными (они тоже находятся в интервале $[-1; 1]$). Однако мы используем упрощенную модель (всего лишь трехбалльная шкала личных оценок, без промежуточных дробных) и просто будем иметь в виду «коридор» измерения оценок в коллективе $[-5; 5]$.

Обратная задача

После решения прямой задачи (по исходным данным определить реакцию системы) следует вопрос о решении обратной задачи: определить исходные условия для получения необходимого результата. В нашем случае – это вопрос о том, какие личные оценки нужны руководителю, чтобы получить заданную реакцию коллектива.

Решая, получим:

$$B^* = AB \Rightarrow B = A^{-1} B^*. \quad (3)$$

Для существования обратной матрицы необходимо, чтобы определитель исходной матрицы был ненулевым. Для нашей конкретной матрицы (см. таблицу):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,1 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 & -0,2 & -0,2 & -0,6 \\ -0,4 & -0,3 & 0,4 & -0,1 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ -0,6 & -0,2 & -0,4 & -0,4 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Предположим, что все в коллективе довольны с силой 1: $B^* | b_j^* = 1 \forall j$:

$$B = A^{-1}B^* = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,6 & 0,1 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 & -0,2 & -0,2 & -0,6 \\ -0,4 & -0,3 & 0,4 & -0,1 & 0,2 \\ -0,4 & 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ -0,6 & -0,2 & -0,4 & -0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ -0,4 \\ -0,2 \\ 0,8 \\ -0,8 \end{pmatrix}$$

Оказывается, чтобы все в коллективе были довольны, иногда нужно оставить кого-то недовольным лично! Руководителю это сделать нетрудно: достаточно там, где «-», обременить сотрудника обсуждаемым мероприятием (возложить на него его исполнение или лишить его части ресурсов), а там, где «+» – создать поощрение (например, передав ему ресурсы, отнятые у «-»); а где 0 – просто оставить в стороне.

При решении данной обратной задачи мы получили решение, не попадающее в приемлемый интервал $a_{ij} \in [-1; 1] \forall i, j$; ответ не соответствует ограничениям личных оценок. В таком случае целесообразно воспользоваться симплекс-методом [5, 6, 13], предварительно преобразовав исходные данные.

Как мы помним, оценка в коллективе шире личной, ее пределы в нашем случае $[-5; 5]$, и значение «1» коллективной поддержки соответствует лишь 1/5 приведенной оценки. Возможно, нам будет нужна более ясная реакция кого-то из сотрудников. Тогда мы можем столкнуться с проблемой границ приемлемости решения. Поэтому разделим переменные на *принципиальные* (соответствуют сотрудникам, чье мнение особо важно в задаче и сводится к максимуму или к минимуму), *специфические* (к ним есть определенные требования – например, неотрицательность) и *статические* (их значение нас не интересует). Необходимо привести к каноническому виду систему:

$$\begin{cases} AX = B^*, \\ b_{pr}^{\min} \rightarrow \min, \\ b_{pr}^{\max} \rightarrow \max, \\ -5 \leq y_i^{sp} \leq b_i^{sp} \leq z_i^{sp} \leq 5, \\ x_j \in [-1; 1] \forall j. \end{cases} \quad (4)$$

Введем целевую функцию $F_X = CB_X^* = C(AX)$ – произведение вектора-столбца коллективных оценок на соответствующие весовые коэффициенты (строка-вектор C), причем для принципиально максимальных коэффициенты положительные, для принципиально минимальных – отрицательны, для всех остальных – равны нулю. Иными словами, $F_X = \sum c_{pr}^{\max} b_{pr}^{\max} - \sum c_{pr}^{\min} b_{pr}^{\min}$, т.е. из суммы наибольших принципиальных мы отнимаем сумму наименьших. Коэффициенты целевой функции выбираются руководителем из расчета: чем важнее переменная – тем больше по модулю ее целевой коэффициент.

Дальнейшее решение зависит от коэффициентов целевой функции. Вычисляем CA . Пусть в нашем случае все переменные равно принципиальны:

$$C^* = CA = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \ -2 \ -3 \ 1 \ 1).$$

Введем вспомогательную матрицу O и вспомогательный вектор-столбец U размерности $n \times 1$, такой, что все его элементы были равны 1:

$$\hat{I}(C^*)|_{o_{ij}} = \begin{cases} 1 \forall i = j, c_i \geq 0, \\ -1 \forall i = j, c_i < 0, \\ 0 \forall i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вводим замену $x_i = o_{ii}(t_i - 1)$. Покажем, что $t_i \in [0; 2] \forall i$. Действительно:

$$\begin{cases} -1 \leq x_i \leq 1, \\ o_{ii} = \pm 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x_i}{1} \leq 1, \\ -1 \leq \frac{x_i}{-1} \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x_i}{o_{ii}} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{x_i}{o_{ii}} + 1 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x_i}{o_{ii}} \leq 1, \\ o_{ii} = \pm 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_i = \frac{x_i}{o_{ii}} + 1 \in [0; 2]$$

Итак, перепишем (4) с учетом вышеописанного:

$$\begin{cases} F_X = C(AX) \rightarrow \max, \\ AX = B^*, \\ -5 \leq y_i^{sp} \leq b_i^{sp} = A_i X \leq z_i^{sp} \leq 5, \\ x_j \in [-1; 1] \forall j, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{X(T)} = CA[O(T-U)] \rightarrow \max, \\ y_i^{sp} \leq A_i^{sp}[O(T-U)] \leq z_i^{sp}, \\ T \in [0; 2], \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(T) = (C^*O)T \rightarrow \max, \\ (A_i^{sp}O)T \leq z_i^{sp} + A_i^{sp}(OU), \\ (A_i^{sp}O)T \leq -y_i^{sp} - A_i^{sp}(OU), \\ T \leq 2, \\ T \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

где A_i^{sp} – вектор-строка матрицы A для специфической переменной b_i^{sp} ; z_i^{sp} , y_i^{sp} – верхняя и нижняя границы b_i^{sp} , по модулю не превышающие размерность матрицы A (в данном случае 5); если какая-то

из них отсутствует, достаточно опустить соответствующее уравнение в системе (6), поскольку граничные значения ± 5 выводились из X и остались в неявном виде в T .

Для чего вводятся вспомогательные матрица и вектор? Канонический вид [5,6,13] задачи линейного программирования

$$\begin{cases} F(X) = CX \rightarrow \max, \\ AX \leq B, \\ X \geq 0. \end{cases}$$

требует, чтобы хотя бы один коэффициент целевой функции был строго положителен. Все переменные неотрицательны ($X \geq 0$), и если все элементы C будут неположительны ($C \leq 0$), целевая $F(X) = CX \leq 0$ будет достигать максимума в точке 0, что противоречит смыслу задачи. Кроме того, вектор X (4) не соответствует $X \geq 0$. Введя замену $x_i = o_{ii}(t_i - 1)$, мы выполняем оба требования: хотя бы один ненулевой коэффициент, все ненулевые переменные. Вектор E принимает вид (5), только в этом случае при умножении на вектор C^* он даст вектор такой же размерности с неотрицательными коэффициентами.

При подстановке замен мы работаем с произведениями векторов, поэтому для облегчения расчетов вводим вектор-столбец из единиц U – тогда мы можем раскрывать скобки и вносить общий множитель, сохраняя размерность ответа.

В приведенном нами примере отсутствуют специфические переменные. Система (6) выглядит следующим образом:

При

$$C^*O = (3 \quad -2 \quad -3 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1);$$

$$\begin{cases} F(T) = (3 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 1) T \rightarrow \max, \\ T \leq 2, \\ T \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что целевая функция $F(T)$ с положительными коэффициентами достигает максимума при максимальных допустимых значениях T , т.е.:

$$\begin{cases} t_i = 2 \forall i, \\ t_i = \frac{x_i}{o_{ii}} + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 / 1 + 1 = 2, \\ x_2 / (-1) + 1 = 2, \\ x_3 / (-1) + 1 = 2, \\ x_4 / 1 + 1 = 2, \\ x_5 / 1 + 1 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = -1, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = 1. \end{cases}$$

Обобщим этот случай для вырожденных задач на вычисление вектора личных оценок. Если в задаче нет специфических переменных, она сводится к системе:

$$\begin{cases} F(T) = (C^*O)T \rightarrow \max, \\ T \leq 2, \\ T \geq 0. \end{cases} \quad (6')$$

Поскольку O подобрана так, что при умножении на нее получается вектор такой же размерности с неотрицательными коэффициентами, то:

при $c_i^* = 0$ переменная t_i никак не влияет на целевую функцию и может принимать любое допустимое значение, то же верно и для x_i ;

при $c_j^* < 0 \Rightarrow o_{jj} = -1 \Rightarrow c_j^* o_{jj} > 0 \Rightarrow t_j = 2 \Rightarrow x_j = o_{jj}(t_j - 1) = -1(2 - 1) = -1$;

при $c_k^* > 0 \Rightarrow o_{kk} = 1 \Rightarrow c_k^* o_{kk} > 0 \Rightarrow t_k = 2 \Rightarrow x_k = o_{kk}(t_k - 1) = 1(2 - 1) = 1$.

Таким образом, решением для (6') будет вектор

$$X(B^*)|x_i = \begin{cases} 1 \forall c_i^* > 0, \\ -1 \forall c_i^* < 0, \\ x_i \in [-1; 1] \forall c_i^* = 0. \end{cases} \quad (6'')$$

Представляет интерес случай, когда какой-то из c_i^* равен нулю. Тогда x_i может принимать любое допустимое значение, а мы получаем дополнительную возможность более точной калибровки результатов воздействия на коллектив.

Безусловно, решение обратной задачи по оценкам работников в коллективе гораздо проще выполнить, задав условия и ограничения вычислительному устройству. Однако без теоретической проверки мы теряем из вида весь процесс расчета, не можем делать обобщения, проводить анализ. В целом технике здесь следует поручать громоздкие трудоемкие вычисления, оставив интерпретацию и комментарии аналитику.

Диагностика коллективного мнения

Мы уже указывали на то, что разные сотрудники занимают разное психо-социальное положение в коллективе (см. таблицу). Еще раз кратко опишем предложенную классификацию членов коллектива и ее практическое значение.

1. По характеру отношения сотрудника к коллективу (столбец «итога», см. таблицу) мы предложили выделить:

1.1. *лоялисты* – наиболее одобряющие коллектив сотрудники. Роль в коллективе: поддержка корпоративных традиций, укрепление связей. Характерные признаки: активное одобрение руководства, широкий круг общения, избегание конфликтов. Применение руководителем: коллективные работы, сглаживание противоречий;

1.2. *оппозиция* – наименее одобряющие коллектив сотрудники. Роль в коллективе: отрицание коллективных ценностей, разрушение связей. Характерные признаки: критика коллег и руководства, нарушение либо скрытый саботаж коллективных действий, высокая конфликтность. Применение руководителем: исполнение непопулярных решений («полковой палач»), нейтрализация опасных горизонтальных связей и сотрудников; эффективны в конкурентной работе – соперничестве с коллегами;

1.3. *центристы* – все остальные сотрудники.

2. По характеру отношения коллектива к сотруднику (строка «все», см. таблицу) нами выделены:

2.1. *лидеры* – наиболее уважаемые сотрудники коллектива. Роль в коллективе: моральный авторитет, неформальное руководство коллективом. Характерные признаки: доминирующая позиция в коллективе, высокая референтность (мнение лидера порождает волну «подражания»). Применение руководителем: выполнение значимых для коллектива действий следует поручать лидеру; поддержка неформального лидера ослабит противодействие коллектива решению руководителя; эффективны в групповых задачах;

2.2. *маргиналы* – сотрудники, вызывающие наибольшее неодобрение коллектива. Роль в коллективе: лица на грани изгнания из коллектива, «парии» [18]; объединяют коллектив против внутреннего раздражителя («белые вороны»). Характерные признаки: низкий ранг в коллективе, высокая вовлеченность в конфликты. Применение руководителем: официальные «козлы отпущения»; связь «неудобного» сотрудника с маргиналом ослабляет первого, маргинал разрушает своим присутствием авторитет и общность мини-группы, дискредитирует ее в глазах коллектива; маргинал выполняет эффективно только индивидуальную работу, в совместной работе катализирует склоки;

2.3. *ядро* – все остальные сотрудники.

Поскольку сотрудник и коллектив взаимодействуют одновременно, нас больше интересуют не сами п.1 и п.2, а их пересечение. При этом центр и ядро отбросим из-за тривиальности (центриста-лидера можно рассматривать просто как лидера из пп. 2.1). Рассмотрим только граничные случаи и их специфику.

Будем исследовать коллектив из n человек, в котором все сотрудники, кроме одного, безразличны друг к другу и только один сотрудник вызывает и испытывает одобрение или неодобрение. Это можно описать матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такой вид матрицы позволяет подробно рассмотреть одного конкретного участника, элиминировав посторонние влияния.

Введем вспомогательную матрицу H размерности $n \times 4$, которая содержит комбинации личных оценок коллектива и данного сотрудника, она позволяет рассмотреть основные комбинации оценок. Все остальные комбинации являются кратными от столбцов H . Матрица H имеет следующий вид:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Опираясь на расчеты по предложенной модели, а также положения теории управления персоналом [1, 2, 3, 19] и социологии [17, 18], рассмотрим крайние комбинации характеристик сотрудников по алгоритму: матрица личных оценок, матрица коллективных оценок, оценка в коллективе H^* и краткие выводы.

1) *Лидер-лоялист*.

Матрица личных оценок сотрудников и матрица коллективных оценок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оценка в коллективе H^*

$$H^* = AH = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выводы. *Лидер-лоялист* повышает сплоченность коллектива, комфортно в нем общается, в действиях проявляет высокое сродство с коллективом: коллективные оценки сонаправлены и тем сильнее, чем ближе личные оценки лидера-лоялиста и коллектива, взаимодополняемы (частично гасятся при противоположном отношении). Значение для руководителя: центр устойчивости коллектива, при сотрудничестве – идеальный агент влияния.

2) Лидер-оппозиция.

Матрица личных оценок сотрудников и матрица коллективных оценок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2-n & -2 & \dots & -2 & -2 \\ 2 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ 2 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценка в коллективе H^*

$$H^* = AH = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & -n & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выводы. Лидер-оппозиционер – недовольный сотрудник, пользующийся авторитетом у коллег; снижает сплоченность коллектива, чувствует себя в коллективе подавленно. В коллективных оценках противостоит группе, отрицает ее ценности; коллективные оценки сотрудников подстраиваются под него. Значение для руководителя: генератор конфликтов, расшатывает и подрывает его изнутри, подлежит дискредитации либо удалению из коллектива.

3) Маргинал-оппозиция.

Матрица личных оценок сотрудников и матрица коллективных оценок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n & -2 & \dots & -2 & -2 \\ -2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ -2 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оценка в коллективе H^*

$$H^* = AH = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-n & 1-n & -n & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выводы. Маргинал-оппозиционер – сотрудник, недовольный коллегами, которые платят ему взаимностью, повышает сплоченность коллектива, ведет себя в коллективе раздраженно; действия и оценки внутри коллектива противоположны общегрупповым. Значение для руководителя: трикстер, нарушитель коллективного спокойствия, «паршивая овца в стаде»; идеальная фигура для непопулярных поручений; эффективен в решении задач с элементами конкуренции; препятствует застою внутри коллектива; при ассоциировании с нежелательными группами и сотрудниками нейтрализует их деятельность, активно ей мешая.

4) Маргинал-лоялист.

Матрица личных оценок сотрудников и матрица коллективных оценок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2-n & 2 & \dots & 2 & 2 \\ -2 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ -2 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценка в коллективе H^*

$$H^* = AH = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выводы. *Маргинал-лоялист* – сотрудник, одобряющий коллег, которые к нему неприязненны; ослабляет сплоченность коллектива, чувствует себя в коллективе угнетенно. Действия маргинала-лоялиста в коллективе активно подавляются, хотя он стремится следовать групповому мнению. Значение для руководителя: «пария», «изгой»; идеален в качестве «козла отпущения». Данный сотрудник ухудшает психологический климат группы: его следует удалить из коллектива или изолировать индивидуальными задачами либо присоединить к группе или сотруднику, которых требуется дискредитировать.

Данная классификация позволит руководителю оценить распределение ролей в коллективе и отчасти сценарии поведения отдельных сотрудников.

Применение метода на практике

Выше мы описали предпосылки и сущность предлагаемого метода матрицы мнений коллектива. Но любые теоретические выводы опираются на практические данные; чтобы анализировать, нужно иметь достоверную информацию. Поэтому здесь мы остановимся на методах сбора информации и ее проверки для построения матрицы личных оценок.

Собственно методов сбора информации всего два – активный и пассивный – в зависимости от вовлеченности сборщика информации (руководителя) в процесс ее возникновения. Что они собой представляют?

1. Наблюдение (пассивный сбор информации). Руководитель опирается на свои субъективные представления, связанные с тем, что он находится над коллективом и зачастую является третейским судьей во внутренних конфликтах. Однако у метода есть недостатки. Субъективный недостаток заключается в том, что руководителю сообщают не то, что произошло на самом деле, а некую подработанную картину, рассчитанную на его нужную реакцию. С коллегами, которым они не подчинены и от которых не зависят, сотрудники гораздо откровеннее и честнее. Объективный недостаток метода заключается в том, что руководитель – тоже человек, его память избирательна и недолговечна.

Мы бы рекомендовали руководителю для компенсации этих недостатков вести простейшие записи наблюдений за жизнью коллектива. Достаточно самостоятельно заполнять управленческий журнал происшествий и личные дела сотрудников, куда вносятся вкратце все примеры взаимодействия подчиненных и особенности их психологического портрета. Не стоит недооценивать этой простой меры! Всего лишь сопоставление записанных слов конфликтующих подчиненных позволит сравнить их в спокойной обстановке и избежать личных пристрастий. А сам факт записи позволит восстановить давно происшедшее без искажений и выявить возможные закономерности.

Конечно, многие современные руководители считают себя слишком занятыми и важными, чтобы

обращать внимание на своих подчиненных. Но «кадры решают все». Если руководитель занят рутинной работой, а не подбором и мотивацией своих подчиненных – это или бездарный руководитель, или просто старший сотрудник с громкой, но пустой должностью. Человеческие ресурсы – самые важные и емкие!

2. Провокация (активный сбор информации). Ситуация, процесс или информация, намеренно инициированная руководителем с целью выявления реакции коллектива. От наблюдений отличается только тем, что в наших силах учесть и ввести гораздо более полные исходные данные. Однако, поскольку это требует больше времени и сил, следует использовать провокацию для моделирования особо интересных условий, маловероятных для наблюдения в стандартной ситуации. Например, если сотрудники работают в разных отделах, мы не можем отследить их отношения без провокации. В остальном провокация не отличается от наблюдения и также фиксируется письменно.

Неизбежная проблема обоих методов заключается в том, что мы получаем не то, что должны внести в матрицу личных оценок. Мы не можем напрямую спросить у сотрудника – как он относится к коллеге, и, даже спросив, получим искаженную информацию. Нам необходимо иметь метод, максимально точно восстанавливающий скрытую от нас информацию по имеющейся открытой.

Пусть в коллективе из n сотрудников мы провели m наблюдений с известными исходными личными оценками в интервале $[-1; 1]$ и конечными коллективными в интервале $[-n; n]$, измеренными по шкале с ценой деления l . Поскольку рассматриваем опытные условия, предполагается наличие погрешности измерения: $AB = \hat{B}^*$, $AB + \varepsilon = B^*$. Нам требуется найти значение матрицы A , дающее наименьшую погрешность для опытных значений коллективных оценок. При этом по смыслу задачи $A|_{a_{ii}} = 1 \forall i$, поскольку каждый сотрудник одобряет самого себя.

Применим метод наименьших квадратов [6, 8, 10]. Матрицей переменных для нас будет A . Нам нужно, чтобы сумма квадратов элементов матрицы погрешностей была наименьшей:

$$\varepsilon | S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 \rightarrow \min.$$

Исходя из $\varepsilon_{ij} = b_{ij}^* - \hat{b}_{ij}^* = b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, $S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})^2$, найдем частную производную S по $a_{tu} | t \neq u$ (поскольку при $t = u$, $a_{tt} = 1$ не является переменной), при этом сразу воспользуемся тем, что $a_{ik} \neq a_{tu} \forall i \neq t$, т.е. отбросим строчки, не зависящие от переменной дифференцирования

$$\frac{\delta S}{\delta a_{tu}} = \frac{\delta}{\delta a_{tu}} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})^2 \right) = \frac{\delta}{\delta a_{tu}} \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (b_{ij}^* - \sum_{k=1, k \neq t}^n a_{ik} b_{kj})^2 \right)$$

$$-\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}^2 \Big) = \frac{\delta}{\delta a_{iu}} \left(\sum_{j=1}^m (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})^2 \right).$$

Далее, поскольку переменная дифференцирования не зависит от j ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta a_{iu}} &= \sum_{j=1}^m \frac{\delta (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})^2}{\delta a_{iu}} = \sum_{j=1}^m \left[2(b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})(-b_{uj}) \right] = \\ &= -2 \sum_{j=1}^m b_{uj} (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}). \end{aligned}$$

Приравняем дифференциал к нулю для минимизации целевой функции и используем свойство $x_{ij} = x_{ji}^T$

$$\begin{aligned} -2 \sum_{j=1}^m b_{uj} (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}) &= 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^m b_{uj} (b_{ij}^* - \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^m b_{uj} b_{ij}^* &= \sum_{j=1}^m (b_{uj} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^m b_{uj} b_{ij}^* &= \sum_{k=1}^n (a_{ik} \sum_{j=1}^m b_{uj} b_{kj}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^m b_{uj} b_{ji}^{*T} &= \sum_{k=1}^n (a_{ik} \sum_{j=1}^m b_{kj} b_{ju}^T) \Rightarrow (bb^{*T})_{ui} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (bb^T)_{ku}. \end{aligned}$$

Это равносильно $BB^{*T} = A(BB^T)$, тогда

$$\hat{A} = BB^{*T} (BB^T)^{-1}. \quad (7)$$

Учитывая смысл задачи, окончательная оценка:

$$A' = (a'_{ij}) \begin{cases} a'_{ij} = 1 \forall i = j \cup \hat{a}_{ij} > 1, \\ a'_{ij} = -1 \forall \hat{a}_{ij} < -1, \\ a'_{ij} = \hat{a}_{ij} \forall i \neq j \cup \hat{a}_{ij} \in [-1; 1]. \end{cases} \quad (8)$$

Требуется оценить точность полученной модели. Будем считать A' – расчетным значением матрицы личных оценок, тогда

$$A'B + \varepsilon = B^* \Rightarrow \varepsilon = B^* - A'B.$$

Мы получили матрицу ε погрешностей измерения коллективных отношений из $n \times m$ элементов. Будем считать погрешности распределенными по нормальному закону $\varepsilon_{ij} \sim N(a; \delta)$.

Проверим гипотезу о несистемности погрешностей измерений коллективных оценок. Поскольку мы измеряли коллективную реакцию по шкале с ценой деления l (т.е. при $1 + 2n/l$ баллов), то допускалась погрешность округления. Отсутствие системных погрешностей означает, что дисперсия ошибок

вызвана только округлением, т.е. $H_0: \delta(\varepsilon) = \delta_{\text{округл.}}$. Погрешность округления представляет собой непрерывную случайную величину, равномерно распределенную на интервале $[-l/2; l/2]$ с математическим ожиданием $m_{\text{округл}} = 0$ и дисперсией $\delta_{\text{округл}}^2 = l^2/12$.

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &\sim N(a; \delta/\sqrt{nm}) \Rightarrow \frac{\bar{\varepsilon} - a}{\delta/\sqrt{nm}} \sim N(0; 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon} &\sim N\left(0; \sqrt{\frac{nm-1}{nm}} \delta\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow X^2(\delta) &= \frac{nm}{nm-1} \sum \frac{(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2}{\delta^2} \sim \chi^2(nm-1). \end{aligned} \quad (9)$$

Случайная величина $X^2(\delta)$ подчиняется распределению Пуассона χ^2 . Если фактическое значение $X^2(\delta = \sqrt{l^2/12})$ меньше критического с заданным уровнем точности, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 о несистемности погрешностей измерений коллективных оценок

$$X^2(H_0) = \frac{12}{l^2} \frac{nm}{nm-1} \sum (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2 < \chi_{1-\alpha}^2(nm-1).$$

Проверим также гипотезу о несмещенности измерения коллективных оценок $H_0: a = 0$. Поскольку $\frac{\bar{\varepsilon} - a}{\delta/\sqrt{nm}} \sim N(0; 1)$, $\frac{nm}{nm-1} \sum \frac{(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2}{\delta^2} \sim \chi^2(nm-1)$, то случайная величина T подчиняется распределению Стьюдента:

$$\begin{aligned} T(a) &= \frac{\frac{\bar{\varepsilon} - a}{\delta/\sqrt{nm}}}{\sqrt{\frac{nm}{nm-1} \sum \frac{(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2}{\delta^2} / (nm-1)}} = \\ &= \frac{nm-1}{nm} \frac{\bar{\varepsilon} - a}{\sqrt{\sum (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2}} \sim t(nm-1), \end{aligned}$$

$$|T(a=0)| = \frac{nm-1}{nm} \frac{|\bar{\varepsilon}|}{\sqrt{\sum (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon})^2}} < t_{1-\alpha}(nm-1). \quad (10)$$

Сравним значение модуля фактической T -статистики при $a=0$ с табличным значением t -распределения с числом степеней $nm-1$ и уровнем значимости α . Если модуль фактического значения меньше критического $|T| \leq t_{1-\alpha}(nm-1)$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 о несмещенности погрешностей измерения коллективных оценок. Иначе следует уточнить экспериментальные данные.

Заключение

В настоящей работе была предложена модель оценки отношений в коллективе исходя из личных симпатий и антипатий сотрудников; решена обратная задача нахождения личных оценок, дающих оптимальное поведение коллектива; рассмотрена классификация сотрудников коллектива согласно матрице личных оценок сотрудников; освещена методика сбора и проверки информации для заполнения матрицы личных оценок.

Используя предложенную в данной работе модель, руководитель сможет составить адекватное представление о вверенном коллективе и спланировать его работу, используя мощный фактор мотивации – социальные связи.

Библиографический список

1. Артамонова Н.В. Кадровый менеджмент. – СПб.: ГУАП, 2003. – 124 с.
2. Бычкова А.В. Управление персоналом: Учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. – 200 с.
3. Управление персоналом: Учеб. для вузов/ Под ред. Т.Ю. Базарова, Б.Л. Еремина. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 423 с.
4. Ильин В.А. и др. Математический анализ. Начальный курс / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Под ред. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., перераб. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.
5. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер и др. / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999. – 407 с.
6. Орлов А.И. Математика случая: Вероятность и статистика – основные факты: Учеб. пособие / А.И. Орлов. – М.: МЗ-Пресс, 2004. – 110 с.
7. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 496 с.
8. Эконометрика / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др. / Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 576 с.
9. Заложнев А.Ю. Внутрифирменное управление. Оптимизация процедур функционирования. М.: ЗАО «ПМСОФТ», 2005. – 290 с.
10. Курбатов В.И., Угольницкий Г.А. Математические методы социальных технологий. М.: Вузовская книга, 1998, – 256 с.
11. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987. – 143 с.
12. Мишин С.П. Оптимальные иерархии управления в экономических системах. – М.: ПМСОФТ, 2004. – 190 с.
13. Орлов А.И. Теория принятия решений. Учеб. пособие. – М.: Изд-во «Март», 2004. – 656 с.
14. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. Пер. с англ. А.М. Раппопорта, С.И. Травкина / Под ред. А.И. Теймана. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 496 с.
15. Угольницкий Г.А. Модели социальной иерархии. – М.: Вузовская книга, 2004. – 88 с.
16. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Структурные особенности систем управления и методы управления // Проблемы теории и практики управления. 2007. №2. С.33–39.
17. Доценко Е.Л. Психология манипуляции: феномены, механизмы и защита. – М.: ЧеРо, Изд-во МГУ, 1997. – 344 с.
18. Майерс Д. Социальная психология. – СПб.: Питер, 2007. – 794 с.
19. Пригожин А.И. Методы развития организаций. – М.: Международный центр финансово-экономического развития, 2003. – 864 с.