

Аналитическое обоснование формул вычисления вероятности безотказной работы для простых моделей надежности

© 2018 г. А.П. Смирнов*

Одной из важнейших проблем проектирования производственных систем является обеспечение их надежности. При этом имеется в виду не только техническая надежность технологического оборудования, но и влияние внешних и внутренних случайных факторов, приводящих к сбоям производственного процесса. В большинстве работ, связанных с исследованием надежности производственных и других технических систем, применяется аксиоматика Колмогорова. Соответствующий ей аналитический аппарат позволяет решать задачи максимизации вероятности выполнения производственных заданий (например, суточного графика выплавки стали или месячного плана производства).

Оценка надежности как производственных, так и информационных систем является обязательной процедурой при их проектировании и производится на основе построения специальной структурной схемы, называемой моделью системы для расчета ее надежности. Надо отметить, что аксиомы Колмогорова сформулированы для системы, состоящей из двух элементов. Соответствующее графическое пояснение справедливости аксиом основано на воображаемом эксперименте по случайному падению некоторой точки на единичный квадрат, внутри которого находятся две пересекающиеся окружности, площади которых пропорциональны вероятностям надежной работы соответствующих элементов. Но при этом нет упоминания, что центры окружностей должны находиться на определенном расстоянии друг от друга.

В данной работе для известных аксиом Колмогорова, лежащих в основе классической теории вероятностей, приведен их аналитический вывод.

Ключевые слова: производственные системы, надежность систем, аксиоматика Колмогорова, последовательное соединение элементов, параллельное соединение элементов, вероятность события, область интегрирования

Исследование надежности производственных систем требует, как правило, применения аксиом теории вероятностей [1–6; 7, С. 101–129; 8; 9].

Существуют две аксиоматики теории вероятностей: теоретико-множественная и частотная. Мы здесь будем основываться на теоретико-множественной аксиоматике Колмогорова [10–21]. Согласно этой аксиоматике построения теории вероятностей определены указанные ниже операции.

1. Вероятность логической суммы двух независимых и несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий: $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

2. Вероятность логической суммы двух независимых и пересекающихся (совместных) событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения (то есть совместного появления): $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Простейшими моделями надежности являются последовательное и параллельное соединения

двух элементов с известными вероятностями безотказной работы p_1 и p_2 . При этом вероятность безотказной работы системы при последовательном соединении двух элементов, как известно, есть произведение вероятностей p_1 и p_2 , что следует из аксиом теории вероятностей. Вероятность безотказной работы системы при параллельном соединении двух элементов следует из формулы, которая также получена на основании этих аксиом. Ниже изложен не аксиоматический, а аналитический подход для вывода указанных зависимостей.

Каждый из упомянутых двух элементов имеет случайный интервал до отказа. Обозначим соответствующие интервалы через τ_1 и τ_2 соответственно. Будем считать эти интервалы взаимно независимыми. Для дальнейших выводов напомним известные соотношения из теории вероятностей.

Пусть v есть детерминированная функция φ двух случайных переменных χ и ρ :

$$v = \varphi(\chi, \rho). \quad (1)$$

Переменная χ имеет закон распределения $f(x)$, и переменная ρ имеет закон распределения $f(y)$. Система (χ, ρ) имеет совместный закон распреде-

* Канд. техн. наук, доцент, alex.p.smirnov@gmail.com
Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», 119049, Ленинский просп., д. 4.

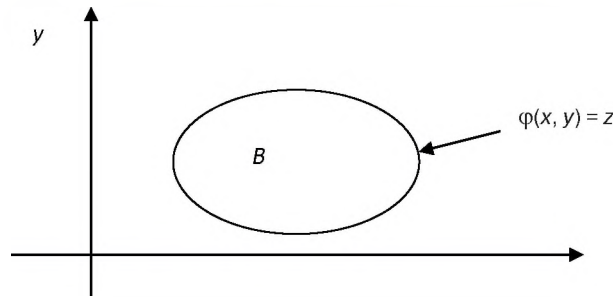


Рис. 1. Область интегрирования B
[Integration domain B]

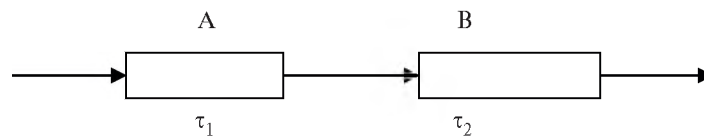


Рис. 2. Последовательное соединение двух элементов
[Sequential connection of two elements]

ления $f(x, y)$, который в случае независимости x и y является произведением $f(x)f(y)$.

Пусть требуется вычислить вероятность события $v \leq z$, где z – заданное число. По определению это интегральный закон распределения:

$$F_v(z) = \text{Вер}(v \leq z) = \text{Вер}(\varphi(x, y) \leq z) = \iint_B f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где область B определяется неравенством $\varphi(x, y) \leq z$ (рис. 1).

Рассмотрим теперь вычисление вероятности безотказной работы для двух простых моделей.

Первая модель: последовательное соединение двух элементов системы A и B со случайными интервалами безотказной работы τ_1 и τ_2 (рис. 2).

Случайный интервал безотказной работы такой системы θ определяется очевидной формулой (3):

$$\theta = \min(\tau_1, \tau_2). \quad (3)$$

Пусть законы распределения интервалов до отказа τ_1 и τ_2 обозначены соответственно через $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

Вероятности отказа элементов q_1 и q_2 на интервале $[0, T]$ определяются формулами (4):

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{Вер}(\tau_1 \leq T) = \int_0^T f_1(t) dt \\ q_2 &= \text{Вер}(\tau_2 \leq T) = \int_0^T f_2(t) dt \end{aligned} \quad (4)$$

При этом вероятности безотказной работы равны: $p_1 = 1 - q_1$, $p_2 = 1 - q_2$.

Требуется вычислить вероятность безотказной работы системы на интервале $[0, T]$, которую мы обозначим через p_Φ . По определению

$$p_\Phi = \text{Вер}(\theta > T). \quad (5)$$

Вычислим для этого вероятность $q_\Phi = 1 - p_\Phi$, то есть вероятность события $\theta \leq T$. Она определяется интегралом (2), где подынтегральное выражение определяется формулами (4). Остается определить область интегрирования B . Для этого нужно определить функцию Φ случайных аргументов τ_1 и τ_2 . Из формулы (3) следует:

$$\theta = \begin{cases} \tau_1, & \tau_1 < \tau_2 \\ \tau_2, & \tau_1 \geq \tau_2 \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда область B определяется в соответствии с рис. 3.

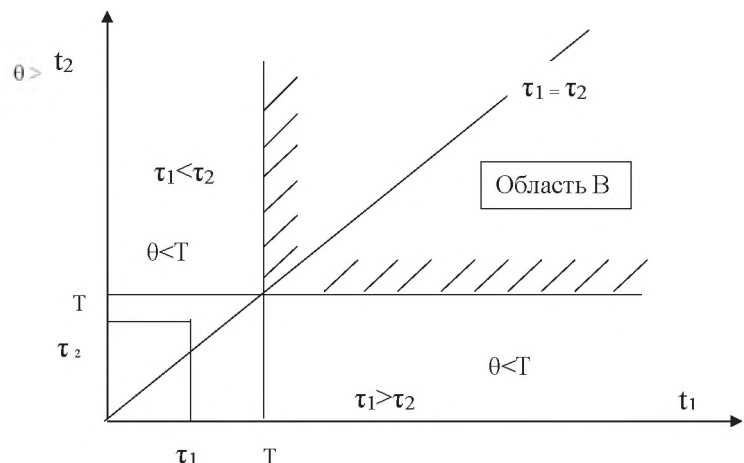


Рис. 3. Область B для последовательного соединения элементов
[Area B for serial connection of elements]

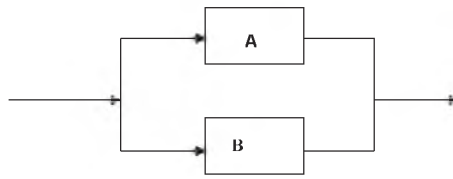


Рис. 4. Параллельное соединение элементов
[Parallel connection of elements]

На осях координат обозначены переменные t_1 и t_2 , которые соответствуют переменным x и y в формуле (2).

На рис. 3 показана область B . В соответствии с ее геометрией запишем интеграл для вычисления вероятности отказа на интервале $[0, T]$, то есть величины $1 - p_\Phi$.

$$\begin{aligned}
 1 - p_\Phi &= \int_{\theta \leq T} (f_1(t_1)f_2(t_2)dt_2)dt_1 = \\
 &= \int_0^T \int_0^{\infty} f_1(t_1)f_2(t_2)dt_2dt_1 + \int_T^{\infty} \int_0^T f_1(t_1)f_2(t_2)dt_2dt_1 = \\
 &= \int_0^T f_1(t_1)dt_1 + \int_T^{\infty} f_1(t_1)dt_1 \int_0^T f_2(t_2)dt_2 = (1 - p_1) + p_1(1 - p_2),
 \end{aligned} \quad (7)$$

отсюда

$$p_\Phi = p_1 p_2. \quad (8)$$

Теперь получим аналогичным образом формулу для вероятности безотказной работы системы из двух элементов, включенных параллельно (рис. 4). Обозначения останутся прежними.

Для вычисления вероятности безотказной работы используем аналогичный интеграл, определив предварительно функцию Φ и область интегрирования B .

Функция Φ определяется соотношением:

$$\theta = \max(\tau_1, \tau_2). \quad (9)$$

Область B показана на рис. 5.

Будем вычислять вероятность безотказной работы p_Φ . При этом область B , соответствующая

неравенству $\theta \geq T$, ограничена внешней стороной квадрата на рис. 5. В соответствии с этим напомним пределы интегрирования.

$$\begin{aligned}
 p_\Phi &= \int_{\theta \geq T} (f_1(t_1)f_2(t_2)dt_2)dt_1 = \\
 &= \int_0^T \int_T^{\infty} f_1(t_1)f_2(t_2)dt_2dt_1 + \int_T^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(t_1)f_2(t_2)dt_2dt_1 = \\
 &= \int_0^T f_1(t_1)dt_1 \int_T^{\infty} f_2(t_2)dt_2 + \int_T^{\infty} f_1(t_1)dt_1 \int_0^{\infty} f_2(t_2)dt_2 = \\
 &= (1 - p_1) \cdot p_2 + p_1 \cdot 1 = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Как видно, полученные формулы (9) и (10) полностью совпадают с формулами, приводимыми в литературных источниках по теории вероятностей, которые считаются верными по определению, как следствие из аксиом.

Библиографический список

1. Информатика: учебник. СПб.: Питер, 2010. 768 с.
2. Никоза А.В. Компьютерные технологии в области автоматизации и управления: учебник. СПб.: СПб ГЭТУ (ЛЭТИ), 2007. 240 с.
3. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 430 с.
4. Венцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1999. 576 с.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебник для студентов математических специальностей университетов. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 447 с.

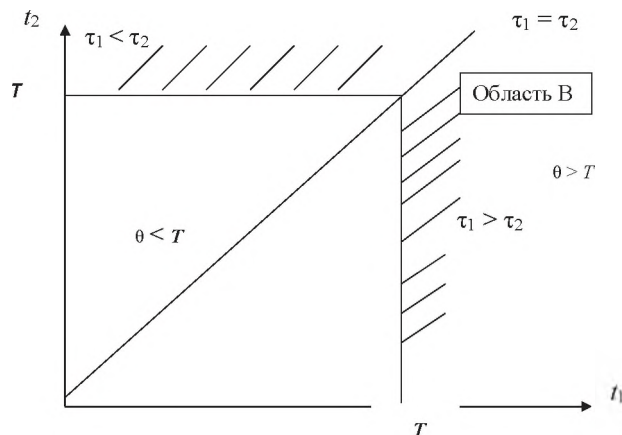


Рис. 5. Область B для параллельного соединения элементов
[Area B for parallel connection of elements]

6. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986. 81 с.

7. Ширяев А.Н. Математическая теория вероятностей. Очерк становления. В кн.: Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Фазис, 1998. 144 с.

8. Вережкин А.П. Лекции по курсу «диагностика и надежность автоматизированных систем управления». Уфа: УГНТУ, 2004. 70 с.

9. Основина О.Н. Диагностика и надежность автоматизированных систем: методическое пособие. Старый Оскол: СТИ МИСиС, 2006. 132 с.

10. Маслов Е.А., Татарникова А.А. Диагностика и надежность автоматизированных систем: письменные лекции. Томск, 2009. 82 с.

11. Схиртладзе А.Г., Уколов М.С., Скворцов А.В. Надежность и диагностика технологических систем. М.: Новое знание, 2008. 518 с.

12. Алексеев А.Е. Методы расчета показателей надежности технических систем: Часть 1. Учебное пособие. Архангельск: Изд-во ФГУП «ПО» Севмаш, 2003. 77 с.

13. Венцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 383 с.

14. Александровская Л.Н., Афанасьев А.П., Лисов А.А. Современные методы обеспечения безотказности сложных технических систем. М.: Логос, 2003. 208 с.

15. Острейковский В.А. Теория надежности. М.: Высшая школа, 2003. 463 с.

16. Бушуев А.А. Архитектура программного комплекса определения надежности информационной системы // Вестник Пермского университета. 2010. Вып. 2(39). С. 21–29.

17. Василенко Н.В. Модели оценки надежности программного обеспечения // Вестник Новгородского государственного университета. 2004. № 28. С. 23–28.

18. Ващенко Г.В., Добронец Б.С. Надежность информационных систем: лабораторный практикум. Красноярск: СФУ ИКИТ, 2008. 104 с.

19. Вихарев С.М., Баринев А.А. Надежность автоматизированных систем. Кострома: Изд-во КГТУ, 2007. 80 с.

20. Додонов А.Г., Ландэ Д.В. Живучесть информационных систем. Киев: Наук. думка, 2011. 256 с.

21. Ермаков А.А. Основы надежности информационных систем. Иркутск: ИРГУПС, 2006. 151 с.

Ekonomika v promyshlennosti = Russian Journal of Industrial Economics

2018, vol. 11, no.3, pp. 256–260

ISSN 2072-1633 (print)

ISSN 2413-662X (online)

Analytical justification of formulas for calculating the probability of failure-free operation for simple reliability models

A.P. Smirnov – Cand. Sci. (Eng.), Associated Professor, alex.p.smirnov@gmail.com
National University of Science and Technology «MISiS»,
4 Leninsky Prospekt, Moscow 119049, Russia

Abstract. In the majority of works connected with research of reliability of production and other technical systems the Kolmogorov axiomatics is applied. The corresponding analytical apparatus allows to solve problems of maximization of probability of performance of production tasks (for example, daily schedule of steel smelting or monthly production plan).

Evaluation of reliability of both production and information systems is a mandatory procedure in their design and is based on the construction of a special structural scheme, called the system model for calculating its reliability. It should be noted that Kolmogorov's axioms are formulated for a system consisting of two elements. The corresponding graphical explanation of axiom equity is based on an imaginary experiment on a random drop of a certain point on a unit square, inside of which there are two intersecting

circles whose planes are proportional to the probability of reliable operation of the corresponding elements. But there is no mention that the centers of circles should be at a certain distance from each other.

In this paper, for the known Kolmogorov axioms underlying the classical probability theory, their analytical conclusion is given.

Keywords: production systems, reliability systems, the axioms of Kolmogorov, the series connection of elements, the parallel connection of elements, the probability of the event, the region of integration

References

1. *Informatika* [Informatics]. St. Petersburg: Peter, 2010. 768 p. (In Russ.)
2. Nikoza A.V. *Komp'yuternye tekhnologii v oblasti avtomatizatsii i upravleniya* [Computer technologies in the field of automation and control]. St. Petersburg: SPb GETU (LETI), 2007. 240 p. (In Russ.)
3. Norenkov I.P. *Osnovy avtomatizirovannogo proektirovaniya* [Fundamentals of computer-aided design]. Moscow: MG TU im. H.Uh. Bauman, 2002. 430 p. (In Russ.)
4. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostei* [Probability Theory]. Moscow: Vysshaya shkola, 1999. 576 p. (In Russ.)

5. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostei* [Course of probability theory]. Moscow: Izdatel'stvo LKI, 2007. 447 p. (In Russ.)
6. Kolmogorov A.N. *Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. Moscow: Nauka, 2011. 81 p. (In Russ.)
7. Shiryaev A.N. *Matematicheskaya teoriya veroyatnostei. Ocherk stanovleniya. V kn.: Kolmogorov A.N. Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostei* [The mathematical theory of probability. Essay on the history of the formation. In book Kolmogorov A.N. Basic concepts of probability theory]. Moscow: Fazis, 1998. 144 p. (In Russ.)
8. Verevkin A.P. *Lektsii po kursu diagnostika i nadezhnost' avtomatizirovannykh sistem upravleniya* [Lectures on diagnosis and reliability of automated control systems]. Ufa: UGNTU, 2004. 70 p. (In Russ.)
9. Osnovina O.N. *Diagnostika i nadezhnost' avtomatizirovannykh sistem* [Diagnostics and reliability of automated systems]. Stary Oskol: STI MISIS, 2006. 132 p. (In Russ.)
10. Maslov E.A., Tatarnikova A.A. *Diagnostika i nadezhnost' avtomatizirovannykh sistem* [Diagnostics and reliability of automated systems]. Tomsk, 2009. 82 p. (In Russ.)
11. Skhirtladze A.G., Ukolov M.S., Skvortsov A.V. *Nadezhnost' i diagnostika tekhnologicheskikh sistem* [Reliability and diagnostics of technological systems]. Moscow: Novoe znanie, 2008. 518 p. (In Russ.)
12. Alekseev A.E. *Metody rascheta pokazatelei nadezhnosti tekhnicheskikh sistem: Chast' 1* [Methods of calculation of reliability indices of technical systems: Part 1]. Arkhangelsk: Izd-vo FGUP «PO» Sevmash», 2003. 77 p. (In Russ.)
13. Venttsel' E.S. *Teoriya sluchainykh protsessov i ee inzhenernye prilozheniya* [Theory of random processes and its engineering applications]. Moscow: Vysshaya shkola, 2000. 383 p. (In Russ.)
14. Aleksandrovskaya L.N., Afanasev A.P., Lisov A.A. *Sovremennye metody obespecheniya bezotkaznosti slozhnykh tekhnicheskikh sistem* [Modern methods of ensuring reliability of complex technical systems]. Moscow: Logos, 2003. 208 p. (In Russ.)
15. Ostreikovskii V.A. *Teoriya nadezhnosti* [Theory of reliability]. Moscow: Vysshaya shkola, 2003. 463 p. (In Russ.)
16. Bushuev A.A. The Architecture of the software system for determining the reliability of an information system. *Vestnik permskogo universiteta = Bulletin of Perm University*. 2010. No. 2(39). Pp. 21–29. (In Russ.)
17. Vasilenko N.V. Model evaluation of the reliability of the software. *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Novgorod State University*. 2004. No. 28. Pp. 23–28. (In Russ.)
18. Vashhenko G.V., Dobronecz B.S. *Nadezhnost' informatsionnykh sistem: Laboratornyi praktikum* [Reliability of information systems]. Krasnoyarsk: SFU IKIT, 2008. 104 p. (In Russ.)
19. Vikharev S.M., Barinov A.A. *Nadezhnost' avtomatizirovannykh sistem* [Reliability of automated systems]. Kostroma: Izd-vo KGTU, 2007. 80 p. (In Russ.)
20. Dodonov A.G., Lande D.V. *Zhivuchest' informatsionnykh sistem* [Survivability of information systems]. Kiev: Naukova dumka, 2011. 256 p. (In Russ.)
21. Ermakov A.A. *Osnovy nadezhnosti informatsionnykh sistem* [Fundamentals of information systems reliability]. Irkutsk: IrGUPS, 2006. 151 p.